El triángulo simétrico-lateral

Francisco J. García Capitán

Marzo de 2004

Resumen

En este documento damos respuesta a las cuestiones planteadas por Martin Acosta en `http://www.cabri.net:16080/problemes/`. Usamos el programa de cálculo simbólico *Mathematica* para efectuar los cálculos y el programa de geometría dinámica *Cabri Géomètre* para hacer las figuras.

1. Definición

Sean ABC un triángulo y P un punto del plano. Si Q, R y S son los puntos simétricos de P respecto de AB, BC y CA, al triángulo QRS se le llama triángulo simétrico-lateral de P respecto del triángulo ABC.

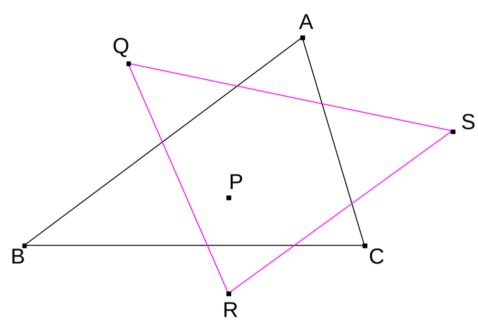

Figura 1: El triángulo simétrico-lateral

2. Las cuestiones

En las páginas siguientes resolveremos las siguientes cuestiones sobre el triángulo simétrico-lateral:

1. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuyo triángulo simétrico-lateral es rectángulo.

2. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuyo simétrico-lateral es isósceles?

3. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuyo simétrico-lateral es equilátero?

4. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuyo simétrico-lateral es aplanado?

5. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuyo simétrico-lateral tiene área igual al triángulo de referencia?

6. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuyo simétrico-lateral es semejante al triángulo de referencia?

7. Caracterizar la transformación que asocia un punto P al baricentro de su triángulo simétrico-lateral con respecto a un triángulo ABC, y encontrar dos procedimientos diferentes de construcción de dicha transformación.

8. Caracterizar la transformación que asocia un punto P al circuncentro de su triángulo simétrico-lateral con respecto a un triángulo ABC, y encontrar dos procedimientos diferentes de construcción de dicha transformación.

3. Cálculos con *Mathematica*

Vamos a usar los números complejos para dar respuesta a la mayoría de las cuestiones. Empezaremos suponiendo que los puntos A, B y C del triángulo están todos en la circunferencia unidad, y que sus afijos son $u = a + bi$, $v = c + di$ y $w = e + fi$. El punto variable P tendrá por afijo el complejo $p = x + yi$.

La simetría respecto de la recta que pasa por u y v, complejos de módulo 1, viene dada por la fórmula $\sigma(z) = u + v - uv\bar{z}$. En efecto, esta fórmula corresponde a una isometría y deja fijos los puntos u y v.

Comenzamos nuestros cálculos con las instrucciones:

```
<< Algebra`ReIm`

simetria[u_, v_, z_] := u + v - u v Conjugate[z] ;

modulo2[z_] := Expand[Re[z]^2 + Im[z]^2];

area[p_, q_, r_] := 1/2 Det[{{1, 1, 1}, {Re[p], Re[q], Re[r]}, {Im[p], Im[q], Im[r]}}]

Clear[x, y, a, b, c, d, e, f];
x /: Im[x] = 0 ; y /: Im[y] = 0; p := x + I y;
a /: Im[a] = 0; b /: Im[b] = 0; u := a + I b;
c /: Im[c] = 0; d /: Im[d] = 0; v := c + I d ;
e /: Im[e] = 0; f /: Im[f] = 0; w := e + I f;
q := simetria[u, v, p];
r := simetria[v, w, p];
s := simetria[w, u, p];
```

El paquete `ReIm` extiende las identidades algebraicas usadas por las funciones `Re`, `Im` y otras. Aquí nos permite definir ciertas variables como reales.

La función `modulo2` calcula el cuadrado del módulo de un número complejo. *Mathematica* ya incorpora para este fin la función `Abs`, pero esta función deja los resultados indicados cuando no son numéricos.

La función `area` calcula el área del, triángulo cuyos vértices tienen por afijos los complejos p, q y r. Un triángulo será aplanado cuando su área se anule.

4. El triángulo simétrico-lateral rectángulo

Usando, el teorema de Pitágoras, el triángulo con afijos q, r y s será rectángulo en r cuando se cumpla la condición $|q-s|^2 = |q-r|^2 + |r-s|^2$.

Para averiguar con *Mathematica* los puntos P que cumplen esta condición, escribimos

```
Collect[
 Simplify[modulo2 [q - s] - modulo2[q - r] - modulo2[r - s],
  {a^2 + b^2 == 1, c^2 + d^2 == 1, e^2 + f^2 == 1}],
 {x, y}]
```

La función `Collect` nos permite agrupar los términos en x e y.

El resultado es una expresión de la forma $\kappa x^2 + \kappa y^2 + 2\delta x + 2\epsilon y + \kappa = 0$, es decir, una circunferencia ortogonal a la circunferencia unidad. Además, si hacemos un dibujo para un caso particular, observamos que esta circunferencia pasa por los puntos B y C.

Ahora podemos usar *Cabri* para dibujar un triángulo ABC cualquiera y una circunferencia Γ, que siendo ortogonal a la circunferencia circunscrita, pase por B y C. La circunferencia Γ tendrá su centro en la intersección de las tangentes por B y C a la circunferencia circunscrita.

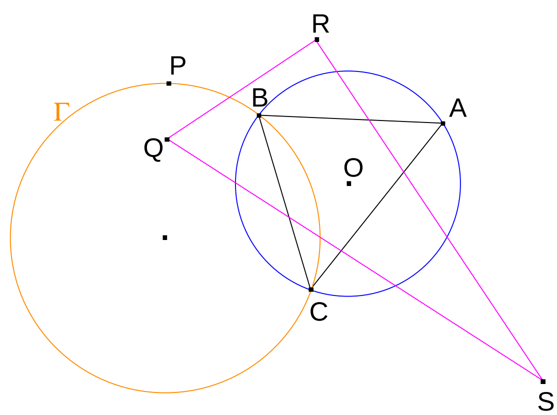

Figura 2: El triángulo simétrico-lateral rectángulo.

Con *Cabri* comprobamos que cualquier punto P sobre la circunferencia Γ tiene un triángulo simétrico lateral rectángulo en R.

De forma análoga, podemos obtener dos circunferencias más, ambas ortogonales a la circunferencia circunscrita, una que pasa por A y B, y otra que pasa por C y A.

5. El triángulo simétrico-lateral isósceles

Para que el triángulo simétrico-lateral QRS sea isósceles, concretamente con ángulos iguales QR y RS, la condición es $|q - r| = |r - s|$. Entonces, escribimos:

```
Collect[
 Simplify[modulo2 [q - r] - modulo2[r - s],
  {a^2 + b^2 == 1, c^2 + d^2 == 1, e^2 + f^2 == 1}],
 {x, y}]
```

obteniendo la ecuación de otra circunferencia ortogonal a la circunferencia unidad. En este caso, el dibujo de un caso particular nos muestra que la circunferencia pasa por el vértice A y por determinado punto del lado BC. Experimentando con *Cabri* obtenemos que se trata del punto de corte de la bisectriz interior del ángulo A y el lado BC.

Existen, de forma análoga otras dos circunferencias que pasan por los vértices B y C.

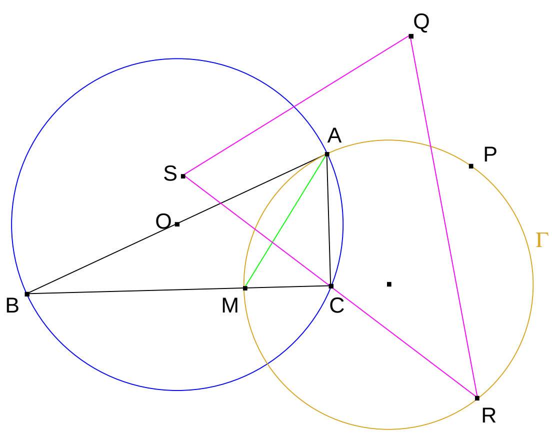

Figura 3: El triángulo simétrico-lateral isósceles.

6. El triángulo simétrico-lateral equilátero

Las tres circunferencias que son soluciones del problema anterior se cortarán necesariamente en dos puntos. El triángulo simétrico- lateral de cada uno de ellos será equilátero.

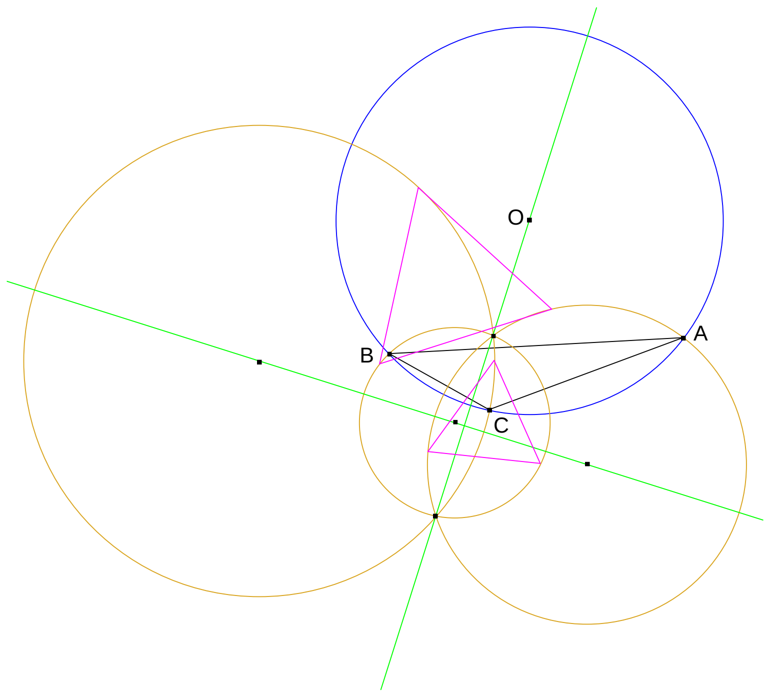

Figura 4: El triángulo simétrico-lateral equilátero.

Los centros de las tres circunferencias están alineados y el eje radical de las tres circunferencias pasa por el circuncentro del triángulo ABC.

7. El triángulo simétrico-lateral aplanado

Para obtener el lugar geométrico de los puntos cuyo triángulo simétrico lateral es aplanado escribimos

```
Collect[
 Simplify[area[q, r, s],
  {a^2 + b^2 == 1, c^2 + d^2 == 1, e^2 + f^2 == 1}],
 {x, y}]
```

El resultado es la circunferencia unidad. Con *Cabri* vemos que si P es cualquier punto de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, el triángulo simétrico-lateral es aplanado y, además, la recta que lo contiene es una recta que pasa por el ortocentro del triángulo.

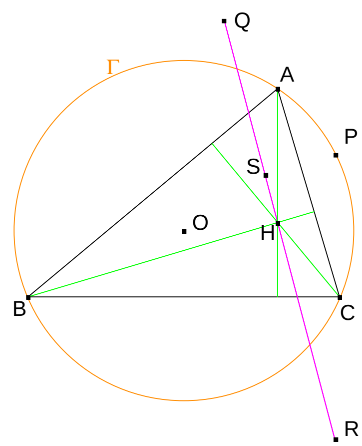

Figura 5: El triángulo simétrico-lateral aplanado.

8. El triángulo simétrico-lateral con la misma área

Para hallar los puntos cuyo triángulo simétrico lateral tiene la misma área que el triángulo de referencia, tenemos en cuenta que la fórmula del determinante puede darnos un signo negativo que sería igualmente válido.

Por tanto, planteamos dos posibilidades:

```
Simplify[area[q, r, s] - area[u, v, w],
 {a^2 + b^2 == 1, c^2 + d^2 == 1, e^2 + f^2 == 1}]

Simplify[area[q, r, s] + area[u, v, w],
 {a^2 + b^2 == 1, c^2 + d^2 == 1, e^2 + f^2 == 1}]
```

El resultado es, en un caso el origen de coordenadas, y en otro la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2$, centrada en el origen con radio $\sqrt{2}$.

Llevado al caso general de cualquier triángulo ABC, con circunferencia circunscrita de centro O y radio ρ, las soluciones son el punto O y los puntos de la circunferencia de centro O y radio $\sqrt{2}\rho$.

La construcción es sencilla: sobre un radio construimos un cuadrado, y el vértice opuesto al circuncentro estará en la circunferencia buscada.

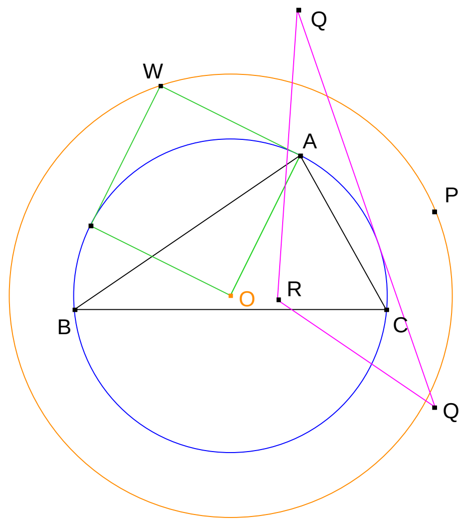

Figura 6: El triángulo simétrico-lateral con la misma área.

9. El triángulo simétrico-lateral semejante

Una de las posibilidades para que el triángulo de vértices q, r y s sea semejante al triángulo de vértices u, v y w es

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RS} = \frac{CA}{SQ} \Rightarrow \frac{|u-v|}{|q-r|} = \frac{|v-w|}{|r-s|} = \frac{|w-u|}{|s-q|}.$$

De acuerdo con esto, escribimos las instrucciones

```
Collect[
 Simplify[modulo2 [u - v] modulo2[r - s] - modulo2 [v - w] modulo2[q - r],
  {a^2 + b^2 == 1, c^2 + d^2 == 1, e^2 + f^2 == 1}],
 {x, y}]

Collect[
 Simplify[modulo2 [u - v] modulo2[s - q] - modulo2 [w - u] modulo2[q - r],
  {a^2 + b^2 == 1, c^2 + d^2 == 1, e^2 + f^2 == 1}],
 {x, y}]
```

Vemos fácilmente que el resultado está formado por dos circunferencias, también ortogonales a la circunferencia unidad, es decir a la circunferencia circunscrita. Un dibujo preliminar muestra que estas circunferencias tienen centros en las rectas AB y BC e intuimos que que los dos puntos de intersección son inversos uno del otro mediante la circunferencia circunscrita.

Con estas consideraciones, mi amigo Jose María Pedret, de Esplugas de Llobregat, encontró esta construcción:

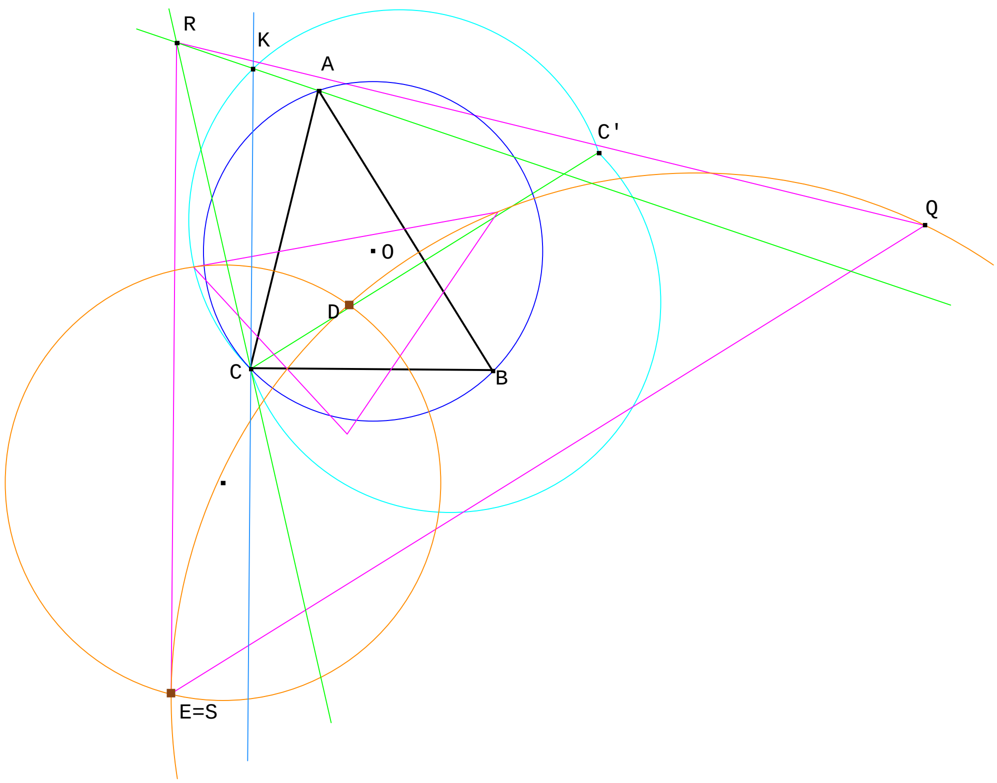

Figura 7: Dos soluciones del triángulo simétrico-lateral semejante.

- Tomemos un punto P cualquiera sobre la recta CA y sea Q el simétrico de P respecto de la recta AB. Si queremos que PQR sea semejante a ABC, R debe estar en el arco capaz de ángulo C y cuerda PQ.

- El lugar geométrico de R es una recta por A. Otro punto K de esa recta se puede hallar suponiendo $P = C$. Es decir, hallamos el punto C', simétrico de C respecto de AB, y trazamos el arco capaz de ángulo C con cuerda CC'. El punto K se obtiene al trazar cortar este arco con una recta que forma un ángulo B con CC'.

- El lugar geométrico de R al recorrer P la recta CA, por definición, es la recta simétrica de CA respecto a BC, así que R estará en la intersección de los dos lugares.

- Una vez hallado R de esta manera, hallamos S y Q mediante simetrías.

Si repetimos el proceso permutando las variables u, v y w, obtenemos más soluciones. En total hay seis permutaciones, que darían lugar a doce puntos. Sin embargo, en uno de ellos, en lugar de obtener, como aquí, dos circunferencias que se cortan en dos puntos, obtenemos dos rectas que se cortan en un punto, concretamente el origen de coordenadas.

Por tanto el resultado es el que se muestra en la siguiente figura:

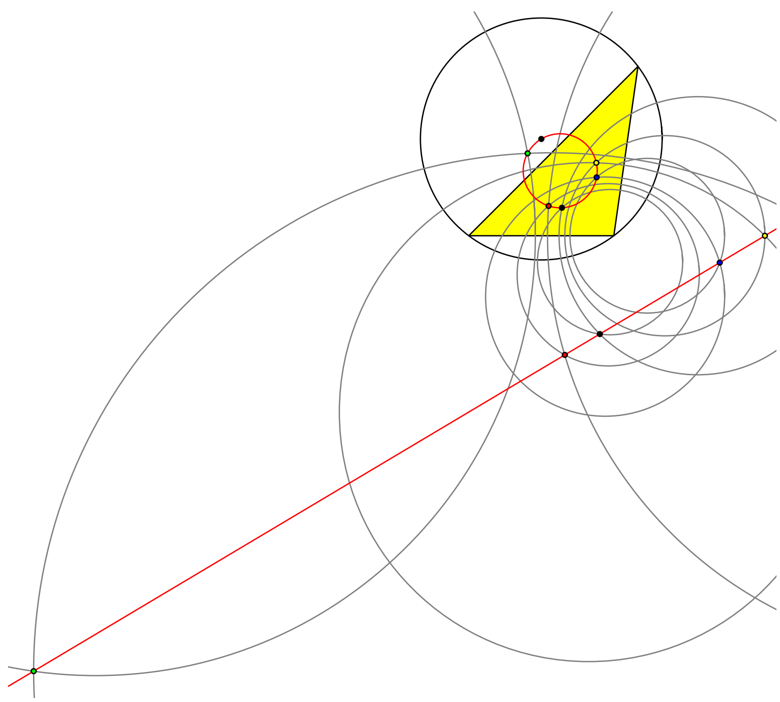

Figura 8: Las once soluciones del triángulo simétrico-lateral semejante.

Tenemos entonces seis puntos, que están en una circunferencia que pasa por el circuncentro, uno de ellos. Hay otros cinco puntos sobre la recta inversa de esta circunferencia respecto de la circunferencia circunscrita, inversos de los cinco puntos anteriores distintos del circuncentro.